INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Capanema

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PARANÁ – IFPR – CAMPUS CAPANEMA

MARCELO RICARDO FRANCIELI WONS

HISTÓRIA DO CÁLCULO INTEGRAL: DAS ORIGENS À INTEGRAL DE LEBESGUE

CAPANEMA - PR
2024

MARCELO RICARDO FRANCIELI WONS

HISTÓRIA DO CÁLCULO INTEGRAL: DAS ORIGENS À INTEGRAL DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática do Instituto Federal do Paraná – Campus Capanema

Orientadora: Profª. Drª. Karla Aparecida Lovis

CAPANEMA - PR
2024

FOLHA DE APROVAÇÃO

MARCELO RICARDO FRANCIELI WONS

HISTÓRIA DO CÁLCULO INTEGRAL: DAS ORIGENS À INTEGRAL DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática do Instituto Federal do Paraná, formada pela seguinte banca examinadora:

Orientadora:

Karla Lovis

Profª. Drª. Karla Aparecida Lovis

Banca examinadora:

Amanda Ferreira de Lima

Profª. Drª. Amanda Ferreira de Lima

Carina M. Costa

Profª. Drª. Carina Moreira Costa

Capanema, 16 de Agosto de 2024

RESUMO

Este trabalho faz uma investigação sobre a história do Cálculo Integral, desde suas origens na Grécia Antiga até a integral de Lebesgue, destacando a Integração como uma ferramenta fundamental na matemática moderna. Descrevemos as principais contribuições matemáticas dos antigos gregos, os avanços na teoria da integração realizados por Johannes Kepler e Bonaventura Cavalieri, a invenção do Cálculo por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Posteriormente, examinamos a abordagem de Augustin-Louis Cauchy à definição de integral, bem como o trabalho de Bernhard Riemann e Henri Lebesgue. No decorrer do trabalho, apresentamos os marcos fundamentais e inovações que moldaram a evolução do Cálculo Integral.

Palavras-chave: História da Matemática; História do Cálculo Integral; Educação Matemática.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A história da matemática é uma das tendências contemporâneas de ensino, contribuindo para o entendimento de que o processo de construção do conhecimento matemático é falível, envolvendo erros e acertos. Conforme evidenciou Gomide na apresentação de História da Matemática de Boyer e Merzbach (2012, p. 17):

> A história das dificuldades, esforço, tempo envolvidos em toda a evolução da matemática dá a medida da grandeza desta realização humana. Não deixa persistir a impressão, que o ensino pode dar, de algo que caiu do céu pronto e perfeito. Tudo, inclusive o que já nos parece trivial, agora que sabemos alguma coisa, tudo custou esforço, erros, tentativas até que um resultado fosse construído. E é a história desse esforço permanente que se procura retratar.

O emprego da história da matemática nos processos de ensino e aprendizagem é recomendação de documentos oficiais, como por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (Brasil, 1998, p. 42).

Ainda, de acordo com Gambera (2021) a pesquisa em história da matemática voltada para a educação oferece uma variedade de razões para ser explorada. A intenção é compreender a essência do pensamento matemático através dos registros históricos que resistiram ao tempo e foram oficialmente integrados à disciplina que ensinamos. Além disso, acompanhar a evolução do conhecimento ao longo do tempo enriquece nossa compreensão dele, abrindo caminhos para diferentes abordagens didáticas. Esse tipo de pesquisa nos permite observar as primeiras questões surgidas em torno de um conceito matemático em formação, o que enriquece nossas aulas, independentemente do nível de ensino.

A história da matemática, para Gambera (2021), também é a história do pensamento e da comunicação desse pensamento, o que destaca sua estreita relação com a educação. Quando discutimos o pensamento matemático, estamos também tratando da linguagem matemática e, por conseguinte, do rigor que ela demanda. Esse rigor varia conforme a complexidade do conceito a ser expresso e é perceptível através da análise das fontes históricas. Ao longo do tempo, vemos mudanças nesse rigor linguístico, com linguagens mais precisas frequentemente simplificando e facilitando a manipulação de conceitos matemáticos.

A evolução do rigor na linguagem matemática reflete as necessidades e demandas da comunidade matemática em diferentes épocas. A introdução de novos padrões de rigor frequentemente traz consigo novos desafios e questões, exigindo a adaptação e o desenvolvimento contínuo da linguagem matemática. Em suma, a exploração da história da matemática nos ajuda a entender não apenas o desenvolvimento do pensamento matemático, mas também a evolução da linguagem matemática e dos padrões de rigor, proporcionando *insights* valiosos para a prática educacional.

Miguel e Miorim (2002) apontam três ramos principais para investigações em História da Matemática: História da Matemática, História da Educação Matemática e História na Educação Matemática. Neste trabalho, optamos por trabalhar com o primeiro, uma vez que pretendemos investigar o desenvolvimento conceitual da Integração, apresentando as ideias dos principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desse campo de pesquisas matemáticas.

Nesta perspectiva, este trabalho tem como objetivo investigar a história do Cálculo Integral, desde suas origens na Grécia Antiga até alguns desenvolvimentos modernos, destacando a Integração como uma ferramenta fundamental na matemática moderna.

2. PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa é considerada bibliográfica, uma vez que nos propomos realizar um estudo de fontes relacionadas ao desenvolvimento histórico do Cálculo Integral. Gil (2002, p. 44) destaca que “a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. O autor descreve que os livros constituem as fontes bibliográficas por excelência. Gil (2002, p. 45) expõe que,

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. [...] A pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. Em muitas situações, não há outra maneira de conhecer os fatos passados se não com base em dados bibliográficos.

A pesquisa bibliográfica, como qualquer outra modalidade de pesquisa, desenvolve-se ao longo de uma série de etapas (Gil, 2002). Para o desenvolvimento da pesquisa foram realizadas as seguintes etapas: primeiro, a escolha do tema. A justificativa para a escolha do tema se deu pelo interesse do pesquisador com relação ao Cálculo Diferencial e Integral. Na sequência, foi realizado um levantamento bibliográfico para auxiliar no delineamento do objetivo da pesquisa. Diante das fontes selecionadas, passou-se ao processo de leitura, fichamento e escrita do trabalho. Destaca-se que, no decorrer das leituras, novas fontes de pesquisa foram selecionadas e incorporadas ao texto.

Diante do exposto, nosso objetivo é investigar o desenvolvimento conceitual da Integração, apresentando as ideias dos principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desse campo de pesquisas matemáticas. Iniciamos descrevendo as contribuições matemáticas dos antigos gregos a respeito do problema do cálculo de áreas de figuras curvas, seguimos com os avanços na teoria da integração realizados por Johannes Kepler e Bonaventura Cavalieri, a invenção do Cálculo por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Posteriormente, examinamos a abordagem de Augustin-Louis Cauchy à definição de integral, que se baseava em limites e evitava o uso de infinitesimais. Em seguida, consideramos o trabalho de

Bernhard Riemann, que expandiu o trabalho de Cauchy. E por fim apresentamos as contribuições matemáticas para o Cálculo Integral de Henri Lebesgue, com a sua generalização da Integral de Riemann.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A História da Matemática é uma das tendências contemporâneas de ensino, contribuindo para o entendimento de que o processo de construção do conhecimento matemático é falível, envolvendo erros e acertos. A História não se limita a elencar fatos, mas pretende identificar e discutir fatores e contextos que influenciaram no desenvolvimento do assunto estudado, focando em toda atividade humana, incluindo a atividade científica. Neste contexto, entende-se a História da Matemática como sendo um objeto essencial na compreensão dos processos de criação, desenvolvimento e uso de teorias e práticas matemáticas em diferentes períodos (D'Ambrosio, 2021).

Miguel e Miorim (2019) defendem que, ao revelar a matemática como uma criação humana, o professor oferece aos alunos a oportunidade de compreender a natureza dinâmica e contextualizada dessa disciplina. Isso permite aos alunos apreciarem a diversidade cultural e as diferentes perspectivas em relação ao conhecimento matemático.

Segundo D'Ambrosio (2021), há quatro finalidades principais para a História da Matemática:

> Para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução; para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade; para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio; para saber que desde então foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em conseqüência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as conseqüências sócio-culturais dessa incorporação (D'Ambrosio, 2021, p. 46).

Miguel e Miorim (2002) apontam três ramos principais para investigações em História da Matemática: História da Matemática, História da Educação Matemática e História na Educação Matemática. O primeiro ramo compreende a História da Matemática como sendo um campo investigativo, isto é, um campo de conhecimento em que a investigação produz ideias e resultados, exploram-se questões relativas a práticas sociais que tiveram/têm influência no processo de desenvolvimento do conhecimento matemático. O segundo ramo dedica-se ao estudo da atividade matemática na história, ou seja, pode-se investigar as questões relativas a práticas sociais apontadas anteriormente, porém com uma perspectiva educacional e pedagógica, com foco em produtos de práticas pedagógicas. O terceiro ramo tem por interesse investigar como a História da Matemática pode auxiliar professores e alunos a buscar os porquês e a utilizar a História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem. Analisando os três ramos destacados, optamos por trabalhar com o primeiro, uma vez que pretendemos investigar o desenvolvimento conceitual da Integração, apresentando as ideias dos principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desse campo de pesquisas matemáticas.

É inegável que a integração é um dos conceitos matemáticos mais importantes já desenvolvidos ao longo da história da pesquisa matemática. Não apenas no contexto do cálculo, a integração se mostra essencial em praticamente todas as categorias e subcategorias da matemática aplicada. Juntamente com a diferenciação, ela adquiriu um *status* como uma ferramenta fundamental na Ciência, na Engenharia e na Tecnologia. Embora tenha sido estudada por milênios e continue o seu desenvolvimento nos dias de hoje, sua essência permanece inalterada desde os primeiros desenvolvimentos na Grécia Antiga: trata-se do estudo do problema da área. Nesse sentido, assim se expressa Stewart (2022, p. xxxi):

> O problema da área é o problema central do ramo do cálculo denominado cálculo integral; ele é importante porque a área sob o gráfico de uma função tem interpretações diferentes dependendo daquilo que a função representa. De fato, as técnicas que desenvolvemos para encontrar áreas também nos permitirão calcular o volume de um sólido, o comprimento de uma curva, a força exercida pela água sobre uma represa, a massa e o centro de massa de uma barra, o trabalho realizado ao se bombear água de um tanque e a quantidade de combustível que é necessária para pôr em órbita um foguete.

Passaremos a descrever os principais episódios e matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Integral.

3.1. ORIGENS DO CÁLCULO INTEGRAL NA ANTIGUIDADE

Não seria surpreendente se os pioneiros desse conceito fossem os geômetras da antiguidade; os grandes pensadores da Grécia Antiga, cujas descobertas ainda ressoam até os dias de hoje, mais de dois milênios depois. No entanto, os gregos não foram os primeiros a explorar esses temas. Tales de Mileto, conhecido como o primeiro filósofo ocidental, durante suas viagens, aprendeu e desenvolveu os conhecimentos adquiridos com os egípcios e os babilônios, transformando-os em princípios gerais - em teoremas matemáticos - e, ao fazer isso, deu início à era dourada da matemática grega. Nesse sentido, Irineu Bicudo, na introdução de sua tradução da obra de Euclides (2009, p. 83), afirma:

> Um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas.
> Quem se achegue descuidadamente a essa história terá a impressão de a geometria ter nascido inteiramente radiante da cabeça de Euclides, como Atenas da de Zeus. Tal foi o êxito dos seus *Elementos* no resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou, quase que completamente, os rastros dos que o precederam.

Durante essa época e posteriormente, várias tentativas foram feitas para resolver problemas referentes ao cálculo de áreas de figuras curvas utilizando os métodos matemáticos conhecidos. Essas abordagens são, em certa medida, semelhantes às que usamos atualmente na teoria da integral. Uma das mais antigas dessas tentativas foi feita por Demócrito de Abdera que trabalhou no problema de calcular o volume de um cone ou pirâmide. Agora sabemos que podemos resolver esse problema usando cálculo infinitesimal ou limites, mas não sabemos até que ponto Demócrito explorou essa incursão inicial no campo.

3.1.1. DEMÓCRITO DE ABDERA

A Idade Heróica da matemática produziu várias figuras notáveis, incluindo Demócrito de Abdera (aproximadamente 460-370 a.C), conhecido como filósofo da química e proponente da doutrina materialista atômica. Ele também era renomado como geômetra e adquiriu conhecimento em suas extensas viagens por Atenas, Egito, Mesopotâmia e possivelmente Índia. Demócrito se orgulhava de seus feitos matemáticos, afirmando que nem os estiradores de corda do Egito o superavam. Demócrito é autor de muitas obras matemáticas, mas nenhuma foi preservada (Boyer, 2012). O que sabemos sobre suas ideias tem origem principalmente em fragmentos e referências feitas por outros autores antigos.

A ideia de infinitesimal entrou no pensamento matemático no século V a.C., resultado das doutrinas gregas sobre a natureza do mundo físico. Surgiu em Abdera a doutrina materialista do atomismo físico. Segundo esta doutrina, não existe uma única *physis*, nem um pequeno grupo de substâncias de que tudo seja composto. Os atomistas de Abdera acreditavam que tudo é constituído por átomos em movimento no vazio. Esses átomos são partículas indivisíveis, semelhantes em qualidade, mas com incontáveis formas e tamanhos, tão pequenos que não podem ser percebidos pelos sentidos.

Não há nada de logicamente ou fisicamente inconsistente nessa doutrina, a qual é uma antecipação primitiva do nosso pensamento químico. No entanto, Demócrito, o maior dos atomistas gregos, não parou por aí: ele também era matemático e aplicou essa ideia à geometria. Conforme revelado pelo Método de Arquimedes, descoberto em um palimpsesto em 1906, Demócrito foi o primeiro matemático grego a calcular os volumes da pirâmide e do cone.

> A chave para a matemática de Demócrito, sem dúvida, é encontrada em sua doutrina física do atomismo. Todos os fenômenos deviam ser explicados, ele arguia, em termos de átomos rígidos infinitamente pequenos e variados (em tamanho e forma), que se movem incessantemente no espaço vazio. O atomismo físico de Leucipo e Demócrito pode ter sido sugerido pelo atomismo geométrico dos pitagóricos e não é de surpreender que os problemas matemáticos que mais interessavam a Demócrito fossem aqueles que exigissem alguma forma de tratamento infinitesimal. Os egípcios, por exemplo, sabiam que o volume da pirâmide é um terço da base vezes a altura, mas uma demonstração disto quase certamente estava acima de suas possibilidades, pois exige um ponto de vista equivalente ao do cálculo. Arquimedes mais tarde escreveu que esse resultado era devido a Demócrito, mas que esse não o demonstrou rigorosamente. Isso cria um enigma, pois, se Demócrito acrescentou alguma coisa ao conhecimento egípcio aqui, só pode ter sido alguma espécie de demonstração, ainda que inadequada. Talvez Demócrito tenha mostrado que um prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triangulares que têm a mesma altura e as áreas das bases

> iguais e depois deduzido, da hipótese que pirâmides de mesma altura e bases iguais são iguais, o teorema egípcio familiar (Boyer, 2012, p. 75).

A solução desenvolvida pelos gregos para calcular áreas em situações onde os métodos geométricos tradicionais não eram aplicáveis é conhecida como método da exaustão.

3.1.2. MÉTODO DA EXAUSTÃO

O método da exaustão era utilizado pelos gregos para resolver problemas de cálculo de áreas e volumes de regiões curvas. Este método é atribuído a Eudoxo de Cnido. Embora a aplicação prática do método pudesse variar de acordo com o problema a ser resolvido, o método da exaustão é uma técnica matemática utilizada para calcular áreas e volumes de certas figuras geométricas, aproximando-as por figuras que podem ser modificadas de alguma forma, como adicionando lados a um polígono, e cujas áreas ou volumes podem ser calculados por métodos conhecidos. À medida que essas formas são modificadas e se aproximam da forma original, suas áreas ou volumes se aproximam do valor da área ou volume da figura original.

No livro XII dos Elementos, Euclides explora figuras geométricas como pirâmides, cilindros, cones e esferas. Segundo Roque e Carvalho (2012), Euclides inicia demonstrando que a razão entre as áreas de dois círculos é a mesma que a razão entre os quadrados de seus diâmetros, conforme a proposição XII.2, utilizando o método da exaustão desenvolvido por Eudoxo. Um passo crucial para essa demonstração é um resultado encontrado no Livro X, a proposição X.I, frequentemente referida como o Lema de Euclides.

> Proposição X.I: Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta (Euclides, 2009, p. 354, tradução de Irineu Bicudo).
> Proposição XII.2: Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros (Euclides, 2009, p. 528, tradução de Irineu Bicudo).

Boyer (2012) chama a Proposição X.I de propriedade de exaustão e em seguida apresenta um exemplo de utilização do método da exaustão para demonstrar a Proposição XII.2. Boyer (2012) apresenta uma demonstração moderna para o método da exaustão, conforme figura 1.

Figura 1 - Exemplo de Utilização do Método da Exaustão.

Sejam c e C os círculos, com diâmetros d e D e áreas a e A. Queremos demonstrar que $a/A = d^2/D^2$. A demonstração estará completa se procedermos indiretamente, mostrando que não são verdadeiras as outras duas possibilidade, isto é, $a/A < d^2/D^2$ e $a/A > d^2/D^2$. Suponhamos, pois, primeiro que $a/A > d^2/D^2$. Então existe uma grandeza $a' < a$ tal que $a'/A = d^2/D^2$. Seja $a - a'$ a grandeza prefixada $\varepsilon > 0$. Vamos inscrever nos círculos c e C polígonos regulares de áreas p_n e P_n, com o mesmo número n de lados, e consideremos as áreas intermediárias, fora dos polígonos, mas dentro dos círculos (Fig. 4.18). Se dobrarmos o número de lados, é evidente que estaremos subtraindo dessas áreas intermediárias mais da metade. Logo, pela propriedade de exaustão, dobrando sucessivamente o número de lados (isto é, fazendo crescer n), as áreas intermediárias podem ser reduzidas até que $a - p_n < \varepsilon$. Então, como $a - a' = \varepsilon$, temos $p_n > a'$. Agora, de teoremas anterio-

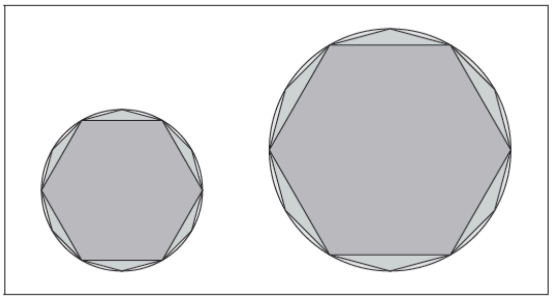


Figura 4.18

res sabemos que $p_n/P_n = d^2/D^2$ e como supusemos que $a'/A = d^2/D^2$, temos $p_n/P_n = a'/A$. Logo, mostramos que se $p_n > a'$ devemos concluir que $P_n > A$. Mas, como P_n é área de um polígono inscrito no círculo de área A, é evidente que P_n não pode ser maior que A. Como uma falsa conclusão implica que uma premissa é falsa, está excluída a possibilidade que $a/A > d^2/D^2$. De modo análogo, mostramos ser impossível que $a/A < d^2/D^2$, e com isso demonstramos o teorema que diz que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros.

Fonte: Boyer, 2012, p. 81-82.

3.1.3. ARQUIMEDES DE SIRACUSA

Siracusa foi sitiada em 214 a.C pelos romanos. Durante o cerco, Arquimedes, o principal matemático da época, inventou máquinas de guerra, como catapultas e dispositivos para levantar e destruir navios romanos. Apesar das ordens do general romano Marcelo para poupá-lo, Arquimedes foi morto por um soldado romano em 212 a.C. Nascido provavelmente em 287 a.C., ele também era conhecido por suas contribuições à astronomia. Ainda que tenha construído planetários que retratavam os movimentos celestes e muitos engenhos mecânicos, Arquimedes, acredita-se, valorizava mais os conceitos abstratos do que seus engenhos mecânicos (Boyer, 2012).

A contribuição mais significativa para o desenvolvimento do cálculo integral na antiguidade veio dos matemáticos gregos, especialmente de Arquimedes de Siracusa. Arquimedes é frequentemente considerado o precursor do cálculo integral devido aos seus métodos inovadores para o cálculo de áreas e volumes.

De acordo com Roque e Carvalho (2012, p. 138) para,

> [...] fazer a 'quadratura' de uma área limitada por uma curva plana significa construir um quadrado cuja área seja igual à da figura. O método da exaustão foi empregado em muitos problemas de quadratura de figuras limitadas por linhas curvas, ou seja, que não são limitadas por poligonais fechadas.

Os métodos empregados por Arquimedes para calcular áreas de regiões delimitadas por curvas, volumes de regiões limitadas por superfícies e áreas de superfícies são encontrados em diversos de seus tratados. Arquimedes utiliza axiomas, definições e proposições para construir seus argumentos. Cada proposição é desenvolvida de forma completa e rigorosa no contexto geométrico formal. No entanto, extrair exemplos e ilustrações que expliquem claramente o método e a estrutura das demonstrações a partir de suas obras não é uma tarefa fácil (Baron, 1985). Boyer (2012, p. 103), destaca que:

> Dos tratados que se ocupavam principalmente do 'método de exaustão', o mais popular era *Quadratura da parábola*. As secções cônicas eram conhecidas havia mais de um século quando Arquimedes escreveu esta obra, mas nenhum progresso fora feito no cálculo de suas áreas. Só o maior matemático da antiguidade conseguiu resolver a questão de quadrar uma secção cônica — um segmento de parábola — o que ele realizou na Proposição 17 da obra em que o objetivo era a quadratura. A demonstração pelo método padrão de exaustão de Eudoxo é longa e elaborada, mas Arquimedes demonstrou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico APBQC é quatro terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e mesma altura.

Conforme Boyer (2012), Arquimedes escreveu ainda o tratado *Sobre a esfera e o cilindro*. Ele pediu que seu túmulo fosse adornado com a figura de uma esfera inscrita em um cilindro, pois descobriu e demonstrou que a razão dos volumes do cilindro e da esfera é de três para dois, uma propriedade que ele afirmou ser desconhecida pelos geômetras anteriores. De acordo com Boyer (2012), Arquimedes demonstrou que a área da superfície de uma esfera é quatro vezes a área de um círculo máximo da esfera. Ele também mostrou que a superfície de qualquer segmento esférico é equivalente à área da superfície curva de um cilindro com o mesmo raio da esfera e altura igual à do segmento. Este teorema crucial sobre a superfície da esfera é apresentado na Proposição 33, após vários teoremas preliminares, incluindo um equivalente à integração da função seno (Figura 2).

Figura 2 - Teorema de Arquimedes equivalente à integração da função seno.

Se um polígono é inscrito em um segmento de círculo LAL′, de modo que todos os seus lados exceto a base são iguais e seu número par, como LK…A…KL′, sendo A o ponto médio do segmento; e se as retas BB′ , CC′ ,… paralelas à base LL′ e unindo pares de vértices são traçadas, então (BB′ + CC′ + ⋯ + LM): AM = A′B′: BA, onde M é o ponto médio de LL′ e AA′ é o diâmetro por M (Fig. 6.6).

Isso é o equivalente geométrico da equação trigonométrica

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\theta}{n}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{n-1}{n}\theta+$$
$$\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{n\theta}{n}=\frac{1-\cos\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2n}.$$

Desse teorema, é fácil obter a expressão $\int_0^{\varphi}$ sen $x\ dx$ = 1 − cosϕ multiplicando ambos os membros da equação acima por θ/n e tomando o limite para n crescendo indefinidamente. O lado esquerdo fica

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(x_i)\Delta x_i,$$

onde $x_i = i\theta/n$ para $i = 1, 2, \ldots$, n, $\Delta x_i = \theta/n$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, e $\Delta x_n = \theta/2n$. O lado direito fica

$$(1-\cos\theta)\lim_{n\to\infty}\frac{\theta}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2n}=1-\cos\theta$$

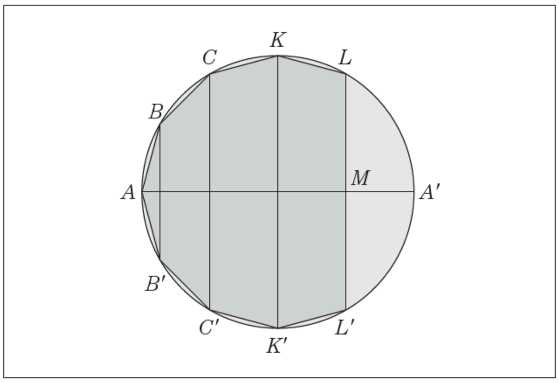


Figura 6.6

Fonte: Boyer, 2012, p. 105.

Embora o método da exaustão tenha sido usado para resolver muitos problemas matemáticos na Grécia Antiga, este método e a matemática da época tinham limitações significativas. Primeiramente, o método exigia adaptação para cada nova forma, não havendo um procedimento geral aplicável com poucas modificações. Além disso, a matemática grega não estava preparada para lidar com conceitos de infinito, somas infinitas ou limites. Embora Arquimedes e outros tenham abordado vários problemas em seus trabalhos com o método da exaustão, eles não foram capazes de avançar no assunto e se aproximar do conceito moderno de integração.

Porém, essas contribuições da antiguidade além de resolver problemas práticos de suas épocas ainda estabeleceram as bases conceituais sobre as quais o cálculo integral seria formalmente construído séculos mais tarde. A capacidade desses matemáticos antigos de abstrair e generalizar a partir de problemas geométricos específicos demonstra um nível de pensamento matemático que é impressionante mesmo pelos padrões modernos. Esses métodos e ideias seriam mais tarde revisados, expandidos, generalizados e formalizados, resultando na criação do cálculo integral por Newton e Leibniz no século XVII.

3.2. INDIVISÍVEIS E INFINITÉSIMOS

Após o florescimento da matemática grega, a Europa enfrentou um período de declínio científico no início da Idade Média, conhecido como a Idade das Trevas, devido a guerras e instabilidade. Nesse período, o conhecimento matemático dos gregos antigos não foi completamente esquecido, mas sim preservado e transmitido por várias culturas, especialmente a bizantina e a islâmica. Eventualmente, esse conhecimento foi redescoberto na Europa Ocidental, onde ajudou a desencadear o renascimento intelectual que levaria ao Renascimento e ao desenvolvimento da matemática moderna. Dessa forma, levou algum tempo até que avanços significativos fossem feitos na teoria da integração. Apesar da perda da tradição matemática grega na Europa, a sua preservação em obras árabes, permitiu a continuação dos debates e pesquisas a respeito das obras matemáticas da Grécia Antiga. Posteriormente surgiram desenvolvimentos e resultados importantes, como a geometria analítica de Descartes e Fermat e ainda a introdução do conceito de infinito no discurso matemático, preparando o terreno para o desenvolvimento posterior do cálculo no final do século XVII.

Nesse novo período de pesquisa matemática, alguns dos primeiros avanços importantes na teoria da integração foram realizados por Johannes Kepler e Bonaventura Cavalieri. Os seus métodos eram mais improvisados por natureza - uma consequência do ambiente matemático da época. Entre os dois, o trabalho de Cavalieri foi o mais significativo na Matemática. Conforme aponta Baron (1985, p. 11):

> Os astrônomos Johannes Kepler (1571-1630) e Galileo Galilei (1564-1642) foram os primeiros a abandonarem a estrutura de

> demonstração introduzida por Arquimedes em troca do uso dos indivisíveis (ou quantidades infinitamente pequenas). Kepler aplicou suas idéias no cálculo de áreas e volumes, utilizando a noção de que eles eram compostos de uma quantidade ‘infinita’ de retas ou planos, enquanto Galileu usou conceitos semelhantes no desenvolvimento dos princípios da cinemática - o estudo do movimento.

3.2.1. JOHANNES KEPLER

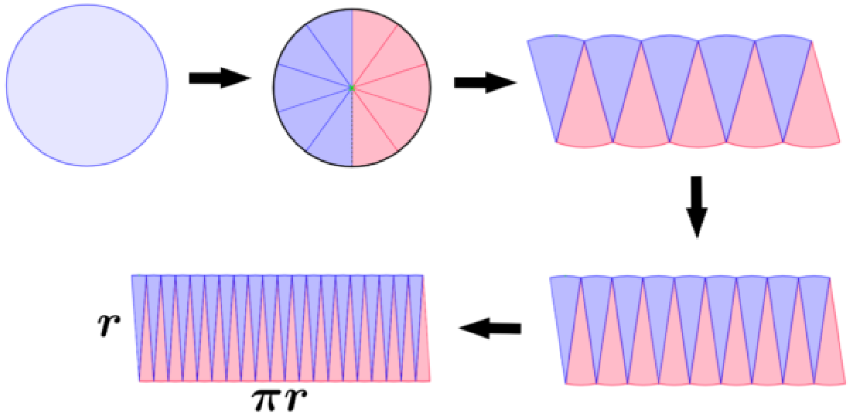
Como aponta Boyer (2012, p. 228), Kepler desenvolveu uma abordagem para aplicar o conceito de infinitamente pequeno na astronomia. Em sua obra *Astronomia Nova*, de 1609, ele apresentou suas duas primeiras leis da astronomia: os planetas seguem órbitas elípticas ao redor do Sol, com o Sol em um dos focos; e o raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Boyer (2012, p. 228-229) apresenta a abordagem de Kepler para os problemas de cálculo de áreas:

> Ao tratar problemas de área como esse, Kepler pensava na área formada por uma infinidade de pequenos triângulos, com um vértice no Sol e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita. Dessa forma, ele pôde usar uma forma tosca de cálculo integral semelhante à de Oresme. A área do círculo, por exemplo, é encontrada desse modo, observando que as alturas dos triângulos infinitamente finos são iguais ao raio. Se chamarmos $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ as bases infinitamente pequenas que estão ao longo da circunferência, então a área do círculo – isto é, a soma das áreas dos triângulos – será $1/2\, b_1 r + 1/2\, b_2 r + \ldots + 1/2\, b_n r + \ldots$ ou $1/2 r(b_1 + b_2 + \ldots)$. Como a soma dos b é a circunferência C, a área A é dada por $A = 1/2 rC$, o bem conhecido teorema antigo, e que Arquimedes demonstrara mais cuidadosamente.

Uma interpretação geométrica para o problema do cálculo de áreas, pode ser obtida utilizando-se de um círculo, o qual é dividido em setores circulares e rearranjados em um paralelogramo, conforme a figura 3.

Figura 3 - Abordagem geométrica para calcular a área do círculo



Fonte: Guzmán, 2024

3.2.2. BONAVENTURA CAVALIERI

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi um matemático italiano mais conhecido por seu livro, *Geometria indivisibilibus continuorum*. Ele foi aluno de Galileo Galilei e tornou-se professor de matemática em 1629, em Bolonha. Seu trabalho mais notável inclui o método dos indivisíveis.

Boyer (2012, p. 233) comenta o seguinte a respeito do *Geometria indivisibilibus continuorum*:

> O argumento em que se baseia o livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu — que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que, de modo semelhante, volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos. Embora Cavalieri na época dificilmente pudesse tê-lo percebido, ele seguia pegadas realmente muito respeitáveis, pois esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em *O método*, então perdido. Mas Cavalieri, ao contrário de Arquimedes, não hesitava perante as deficiências lógicas por trás de tais processos.

Ainda, de acordo com Roque e Carvalho (2012, p. 271):

> Uma consequência deste método é que, se dois sólidos têm a mesma altura e se as secções obtidas por cortes paralelos às suas bases estão, sempre, na mesma razão, os volumes dos sólidos estão um para o outro nesta mesma razão. Usando este princípio, Cavalieri demonstrou que o volume do cone é 1/3 do volume do cilindro circunscrito. Após a publicação da Geometria de Descartes, Cavalieri também usa coordenadas para calcular, por seu novo método, a

quadratura da parábola. A praticidade do método de Cavalieri fez com ele que fosse amplamente utilizado em sua época. Tratava-se de uma maneira eficaz de evitar os procedimentos infinitos indiretos usados pelos gregos. Por sua vez, durante a primeira metade do século XVII, Fermat, Roberval e Pascal utilizam o método dos indivisíveis, concebendo, entretanto, a área como uma soma de retângulos infinitamente pequenos, em vez de uma soma de linhas.

Segundo Boyer (2012, p. 234), o teorema de Cavalieri mais importante é equivalente, em notação moderna, a afirmação

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

O enunciado e a demonstração do teorema são muito diferentes dos que o leitor moderno conhece, pois Cavalieri comparava potências dos segmentos em um paralelogramo paralelos à base com as potências correspondentes de segmentos em qualquer dos dois triângulos em que uma diagonal divide o paralelogramo. Considere o paralelogramo AFDC, dividido em dois triângulos pela diagonal CF e seja HE um indivisível do triângulo CDF que é paralelo à base CD. Então, tomando BC = FE e traçando BM paralelo a CD, é fácil mostrar que o indivisível BM no triângulo ACF será igual a HE. Portanto, podemos estabelecer correspondência entre todos os indivisíveis do triângulo CDF e indivisíveis iguais do triângulo ACF, e, portanto, os triângulos são iguais. Como o paralelogramo é a soma dos indivisíveis nos dois triângulos, é claro que a soma das primeiras potências dos segmentos em um dos triângulos é metade da soma das primeiras potências dos segmentos no paralelogramo; em outras palavras,

$$\int_0^a x \quad dx = \frac{a^2}{2}$$

3.3. NEWTON E LEIBNIZ

Newton e Leibniz são inquestionavelmente os principais protagonistas no desenvolvimento do cálculo. Embora seus enfoques fossem distintos, ambos são reconhecidos por terem criado o ramo da matemática que hoje chamamos de Cálculo. Anteriormente, havia diversos métodos conhecidos para lidar com problemas de tangentes e áreas, mas eram aplicados de forma específica a problemas particulares, conforme evidencia Roque e Carvalho (2012, p. 245),

> Antes de Newton e Leibniz, problemas envolvendo o estudo de curvas, como os que envolviam a determinação de tangentes e áreas, eram tratados de forma independente. Os métodos empregados por diferentes estudiosos possuíam semelhanças entre si, mas estas não eram ressaltadas. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre o modo de resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas sem reconhecer a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas.

O que Newton e Leibniz realizaram foi a criação de um sistema abrangente, denominado cálculo, que transformou esses métodos especializados em procedimentos algorítmicos gerais. Eles estabeleceram uma conexão duradoura entre os problemas de tangentes e áreas por meio do Teorema Fundamental do Cálculo. Na figura 4 podemos ver o Teorema Fundamental do Cálculo presente em um livro de Cálculo:

Figura 4 - Teorema Fundamental do Cálculo escrito em notação moderna.

Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, então $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Fonte: Stewart, 2022, p. 373.

Newton e Leibniz perceberam que uma ampla gama de problemas envolvendo o cálculo de centros de gravidade, áreas, volumes, tangentes, comprimentos de arco, raios de curvatura, superfícies, etc., que haviam desafiado os matemáticos na primeira metade do século XVII, eram na verdade versões particulares de dois problemas gerais fundamentais. Além disso, eles entenderam que esses dois problemas eram inversos entre si (este é o Teorema Fundamental do Cálculo). Compreenderam que a solução do problema da tangente (Cálculo Diferencial), mais simples, poderia ser usada para resolver o problema da área (Cálculo Integral). Finalmente, Newton e Leibniz desenvolveram algoritmos eficientes que podem ser aplicados de maneira sistemática e geral.

O cálculo de Newton e Leibniz não lidam com funções, já que o conceito de função só surgiu mais tarde. Eles falam em termos de quantidades em vez de funções e se referem a essas quantidades relacionadas a entidades geométricas específicas (geralmente uma curva). Além disso, enquanto costumamos nos referir ao cálculo desenvolvido no contínuo dos números reais, o contínuo ao qual Newton e Leibniz se referem é geométrico ou cinemático. É recorrendo a um contínuo geométrico ou cinemático intuitivo que Newton e Leibniz desenvolveram seus procedimentos de limite.

Dado que este trabalho se concentra na história da integração, em vez de abordar o cálculo como um todo, a discussão sobre o desenvolvimento de problemas relacionados a tangentes é em grande parte deixada de lado. No entanto, é evidente pelo Teorema Fundamental do Cálculo que esses dois tópicos estão profundamente interligados. A partir do século XVII, esse teorema desencadeou um grande avanço na matemática, ao permitir a resolução de problemas e questões específicas dentro de um contexto mais amplo, que hoje conhecemos como Cálculo.

Embora suas abordagens ao Cálculo fossem distintas, ambos contribuíram significativamente para a formalização desse campo matemático.

3.3.1. ISAAC NEWTON

Isaac Newton, nascido prematuramente no dia 25 de dezembro de 1642, o mesmo ano em que Galileu faleceu, mostrou desde cedo um potencial notável que não passou despercebido ao seu tio, um ex-aluno de Cambridge. Este persuadiu sua mãe a enviar Newton para estudar na Universidade de Cambridge. Assim, em 1661, Newton ingressou no Trinity College. No primeiro ano, Newton estudou *Os Elementos* de Euclides, *Clavis* de Oughtred, a *Geometria a Renato Des Cartes* de Van Schooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Viète e a *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis. A partir de 1663, Newton também assistiu às conferências ministradas por Isaac Barrow. Newton também conhecia as obras de Galileu, Fermat, Huygens, entre outros (Boyer, 2012).

No final de 1664, Isaac Newton já havia alcançado a vanguarda do conhecimento matemático, e logo faria as suas contribuições matemáticas. As primeiras descobertas aconteceram no começo de 1665, envolviam a expressão de funções através de séries infinitas, um feito paralelo ao trabalho de Gregory na Itália, embora seja improvável que Newton estivesse ciente disso. Durante o mesmo período, Newton começou a explorar conceitos relacionados à taxa de variação, ou fluxo, de quantidades que mudam continuamente, como dimensões, áreas, volumes, distâncias e temperaturas. Essa investigação das séries infinitas e das taxas de variações marcou o início do que ele denominaria *meu método* (Boyer, 2012).

Em um período marcado pelo fechamento do Trinity College devido à peste, logo após Newton receber seu título de Bacharel, ele se retirou para a casa de sua família. Essa fase, que abrangeu grande parte de 1665-1666, acabou sendo extraordinariamente frutífera para sua pesquisa matemática. Durante esse intervalo, Newton realizou avanços significativos: a formulação do teorema binomial, a invenção do cálculo, o estabelecimento da lei da gravitação universal e a exploração da natureza das cores (Boyer, 2012).

De acordo com Boyer (2012, p. 273),

> O próprio Newton nunca publicou o teorema binomial, nem o demonstrou; mas redigiu e finalmente publicou várias exposições de sua análise infinita. A primeira dessas, cronologicamente, foi a *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta em 1669, com base em ideias adquiridas em 1665-1666, mas publicada só em 1711.

Na figura abaixo temos a demonstração dada por Newton na obra *De analysi*. A área sob a curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$ é dada por:

Figura 5 - Demonstração de Newton em *De analysis.*

$$\frac{ax^{(m/n)+1}}{(m/n)+1}.$$

Denote a área por z e suponha que

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n}.$$

Denote por o o momento ou acréscimo infinitesimal da abscissa. Então, a nova abscissa será $x + o$ e a área aumentada será

$$z + oy = \frac{n}{m+n}a(x+o)^{(m+n)/n}.$$

Se aplicarmos aqui o teorema binomial, larmos os termos iguais

$$z \quad \text{e} \quad \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n},$$

dividirmos tudo por o e abandonarmos os que ainda contêm o, o resultado será $y =$ Reciprocamente, se a curva for $y = ax^{m/n}$ a área será

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n},$$

Fonte: Boyer, 2012, p. 274.

Boyer (2012) descreve que essa parece ser a primeira ocorrência na história da matemática onde uma área foi determinada pelo processo inverso do que hoje chamamos de derivação. Embora tal possibilidade certamente fosse de conhecimento de Barrow e Gregory, e possivelmente também por Torricelli e Fermat, foi Newton quem se destacou como o inventor do cálculo. Ele conseguiu explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua inovadora análise infinita. Isso explica por que ele posteriormente rejeitou quaisquer tentativas de dissociar seu cálculo de sua análise por séries infinitas.

3.3.2. LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) estudou teologia, direito, filosofia e matemática em Leipzig. Aos vinte anos, estava pronto para obter o doutorado em direito, mas devido à sua pouca idade, foi recusado. Assim, ele deixou Leipzig e conseguiu seu doutorado na Universidade de Altdorf, em Nuremberg. Posteriormente, ingressou no serviço diplomático. Leibniz viajou extensivamente. De acordo com Boyer (2012, p. 287), Leibniz, “em 1672, foi a Paris, onde encontrou Huygens, que sugeriu que se ele desejava tornar-se um matemático, deveria ler os tratados de Pascal de 1658-1659”.

Além disso, segundo Boyer (2012, p. 287) no ano seguinte,

> Em 1673, uma missão política levou-o a Londres, onde comprou um exemplar das *Lectiones geometricae* de Barrow, encontrou Oldenburg e Collins, e tornou-se membro da Royal Society. É em grande parte em torno dessa visita que gira a querela posterior sobre prioridade, pois Leibniz poderia ter visto a *De analysi*, de Newton, em manuscrito. Entretanto, é duvidoso que nessa altura ele pudesse tirar grande proveito disso, pois Leibniz não estava ainda bem preparado em geometria ou análise. Em 1676, Leibniz visitou novamente Londres, trazendo consigo sua máquina de calcular; foi durante esses anos entre suas duas visitas a Londres que o cálculo diferencial tomou forma.

A respeito desta descoberta, Boyer (1992, p. 45) aponta o seguinte:

> Leibniz contava que fora ao ler Pascal que percebera subitamente que a tangente a (ou inclinação de) uma dada curva podia ser encontrada formando-se a razão entre as *diferenças* das ordenadas

> e das abscissas de dois pontos vizinhos da curva, conforme essas diferenças se tornassem cada vez menores. Notou ainda que a quadratura da (área sob) curva podia ser tomada como a soma das ordenadas ou de uma infinidade de retângulos estreitos. E, o que é mais significativo, observou que esses dois processos de “diferençar” e somar (isto é diferenciar e integrar) eram inversos um do outro .

Segundo Baron e Bos (1985), Leibniz escolheu o símbolo para a operação de integração, ele escreve $\int$ para *omn.* (simbolismo introduzido por Cavalieri, onde *omn.* representa *omnia*, do Latim, *todos*), de modo que $\int l = omn.\ l$, ou seja a soma de todos os l 's. Ademais, Boyer (1992, p. 46) observa que “Leibniz ainda não escrevia $\int x$ inteiramente como $\int x\, dx$, mas no mesmo manuscrito logo chegou à questão das “diferenças”, como sempre chamou as diferenciais.

Para Roque e Carvalho (2012), ao compararmos os cálculos de Newton e Leibniz com os métodos atuais, observamos que eles trabalhavam com variáveis definidas em curvas, enquanto o cálculo contemporâneo é baseado na noção de função. No século XVII, o principal objetivo era desenvolver métodos para resolver problemas relacionados a curvas geométricas, frequentemente originados de contextos físicos, como encontrar tangentes, calcular áreas sob curvas, determinar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos em movimento ao longo de uma curva. Em outras palavras, tratava-se de abordar problemas de natureza geométrica ou cinemática utilizando as ferramentas do cálculo. Isso representava a exploração de um novo domínio, o das relações entre quantidades, que posteriormente levaria ao surgimento do conceito de função como uma relação entre quantidades.

3.4. DESENVOLVIMENTOS MODERNOS

Embora Newton e Leibniz tenham de fato estabelecido um sistema para o estudo de muitos problemas aplicando os seus desenvolvimentos do Cálculo Integral, este não estava desprovido de limitações. Nos séculos subsequentes, avanços foram feitos por Augustin-Louis Cauchy, Bernhard Riemann e outros, os quais nos apresentaram a definição bem conhecida de uma integral como o limite de um procedimento de soma. Além disso, para que o cálculo pudesse atingir seu potencial máximo, uma teoria de funções mais rigorosa era necessária.

Leonhard Euler, no século XVIII, ofereceu uma contribuição significativa nesse sentido. Seu trabalho foi tão meticuloso e sua notação tão avançada que poderia ser facilmente confundido com um trabalho contemporâneo. Posteriormente, Henri Lebesgue refinou essas ideias. Enfim, graças ao trabalho de Abraham Robinson no século XX as incertezas e desafios relacionados ao papel do infinito e do infinitesimal na matemática foram finalmente esclarecidos.

No período subsequente a criação e desenvolvimento do cálculo por Newton e Leibniz, a integração, através do teorema fundamental do cálculo, era geralmente considerada como antidiferenciação, em vez de ser reconhecida como um conceito matemático com uma existência própria. Embora a ideia da integral como o limite de uma soma tenha sido explorada anteriormente, ela era mais vista como um método conveniente para resolver integrais complicadas do que como uma base fundamental para uma Teoria da Integração.

Além disso, o conceito de área ainda não havia sido matematicamente definido - era considerado algo evidente por si só e que não necessitava de clarificação.

De acordo com Edwards (1979), aparentemente Giuseppe Peano forneceu a primeira definição matemática formal de área:

> Desde o século XVII, a ideia de integral sempre foi motivada pelo conceito de área. Em particular, se O_f denota o conjunto ordenado da função não-negativa f no intervalo — o conjunto de todos os pontos (x, y) com $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq f(x)$ — a ideia era que o valor da integral $\int_a^b F(x)dx$ deveria ser a área $a(O_f)$. No entanto, antes do final do século XIX, o conceito de área em si era totalmente intuitivo e não baseado em nenhuma definição precisa.
> [...] Começando com Eudoxo e seu método da exaustão, sempre foi considerado óbvio que a área de um conjunto plano S é o limite superior das áreas de todos os polígonos contidos em S e o limite inferior das áreas de todos os polígonos que contêm S. (Claro, a área de um polígono é obtida dissecando-o em triângulos).
> Peano tomou essa ideia antiga como ponto de partida para uma definição de área. Ele definiu a *área interna* $a_i(S)$ de S como o supremo das áreas de todos os polígonos contidos em S e a *área externa* $a_0(S)$ como o ínfimo das áreas de todos os polígonos que contêm S. É claro que $a_i(S) \leq a_0(S)$, mas os dois podem não ser

iguais. Por exemplo, se S é o conjunto de todos os pontos (x, y) no quadrado unitário $0 \le x,\ y \le 1$ tal que os números x e y são ambos irracionais, então $a_0(S) = 1$, a área do quadrado, mas $a_i(S) = 0$ porque apenas polígonos degenerados estão contidos em S.

Com a definição de Peano de área interna e externa, é fácil estabelecer que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = a_i(O_f) \; e \; \overline{\int_a^b} f(x)dx = a_0(O_f)$$

para qualquer função não-negativa f em $[a, b]$. No caso de $a_i(S) = a_0(S)$, o valor comum é *a área* $a(S)$ de S. Se f é integrável, então isso se reduz a

$$\int_a^b f(x)dx = a(O_f).$$

Neste ponto, o conceito de integral havia completado um círculo completo, retornando à sua motivação original (Edwards, 1979, p. 327-328, tradução nossa).

A integração era aplicada apenas a funções definidas por uma expressão analítica única e explícita. A necessidade de ampliar o conceito de integração foi destacada pelas séries de Fourier, cujos coeficientes são determinados por integrais que não se encaixavam bem na compreensão da época.

3.4.1. CAUCHY

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi um dos matemáticos a abordar esses problemas, reconhecendo a importância de criar teoremas gerais de existência para integrais de diferentes classes de funções. Ele desenvolveu uma teoria das integrais de funções contínuas em intervalos fechados em sua obra "Résumé des leçons données à l’École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal" de 1823.

Roque e Carvalho (2012, p. 327) descrevem que, na época em que viveu Cauchy, ocorreu um desenvolvimento histórico interessante, envolvendo a relação entre pesquisa matemática e ensino:

A revolução francesa modificou radicalmente o papel dos matemáticos na França e sua atuação na sociedade. A criação das “Grandes Écoles”, nas quais alguns dos melhores matemáticos da época foram professores, introduziu uma componente na atividade Matemática - o ensino - que teria consequências importantes para a evolução da própria Matemática. Enquanto os matemáticos eram membros de academias científicas, mantidos por governantes, geralmente por questão de prestígio, sua obrigação era gerar novos

> conhecimentos, comunicados frequentemente de maneira informal, por cartas, por exemplo, a colegas matemáticos. Quando o matemático é professor, com a obrigação de expor um campo da Matemática para principiantes, muitos dos quais não almejavam tornar-se matemáticos mas sim engenheiros, oficiais do exército, etc, surge a necessidade de organizar e expor com clareza o campo em questão. A partir desta época, muitos novos métodos e resultados aparecem em primeiro lugar nos livros-texto que consistiam nas lições dadas nas "Grandes Écoles" ou em universidades. Como professor da *École Polytechnique*, Lagrange publicou sua *Théorie das Fonctions Analytiques*, em 1798, e Cauchy alguns anos mais tarde, em 1821, seu *Cours d'analyse algébrique*. Um dos fatores que impulsionaram a transformação da análise na época é o fato de que a grande maioria dos matemáticos militantes estavam empenhados no ensino, e portanto tinham que reorganizar didaticamente as teorias matemáticas. Isso significa isolar os princípios fundamentais da teoria (em análise, o conceito de função, continuidade, limite, derivada, integral, etc.) e destes conceitos deduzir o corpo da teoria. A partir desta época, temos os tratados escritos por matemáticos franceses, como Lacroix, Lagrange e Cauchy.

Segundo Eves (2011, p. 530), no século XIX teve início um "movimento visando imprimir rigor à análise".

> Deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários, como os conceitos básicos de limite e continuidade. Cauchy definiu a derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite, quando $\Delta x \to 0$, da razão
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
>
> Embora tivesse ciência da facilidade operacional das diferenciais, Cauchy relegou-as a segundo plano. Se dx é uma quantidade finita, ele definiu dy, de $y = f(x)$, simplesmente como $f'(x)dx$ (Eves, 2011, p.531-532).

Boyer (2012, p.337) apresenta a definição de integral de Cauchy.

> Durante o século dezoito, a integração tinha sido tratada como a inversa da derivação. A definição de Cauchy de derivada torna claro que a derivada não existirá em um ponto em que a função seja descontínua; mas a integral pode não ter dificuldades. Mesmo curvas descontínuas podem determinar uma área bem definida. Por isso, Cauchy definiu a integral definida em termos de limite de somas de modo que não difere muito do usado em textos elementares de hoje, só que tomou o valor da função sempre na extremidade esquerda do intervalo. Se $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ... + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$, então o limite S desta soma S_n, quando os tamanhos dos intervalos $x_i - x_{i-1}$ decrescem indefinidamente, é a integral definida da função

$f(x)$ no intervalo de $x = x_0$ até $x = X$. É do conceito de Cauchy de integral como limite de soma, em vez da primitivação, que provieram as muitas e frutíferas generalizações modernas da integral.

3.4.2. RIEMANN

A respeito das contribuições ao Cálculo Integral de Bernhard Riemann (1826-1866), Eves (2011, p.614) ressalta que:

> Riemann tornou claro o conceito de integrabilidade pela definição do que chamamos agora integral de Riemann, abrindo caminho, no século XX, para o conceito mais geral de integral de Lebesgue e, daí, para generalizações ulteriores da integral.
> Segundo Jahnke (2003, p. 264) Riemann assim como Cauchy inicia particionando o intervalo $[a, b]$ da seguinte forma $a = x_0 <\ldots< x_n = b$ e, então, diferentemente de Cauchy, define a seguinte soma
>
> $$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i . f(x_{i-1} + \delta_i \epsilon_i),$$
>
> com $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots , n)$. Se δ torna-se infinitamente *pequeno*, o limite é chamado de $\int_a^b f(x)dx$.
> Em outras palavras: Se as somas de Riemann convergem para um valor real fixo A com o aumento do refinamento da partição e independentemente da escolha dos pontos $x_{i-1} + \epsilon_i (x_i - x_{i-1})$, onde $\epsilon_i \in (0, 1) \cap Q$, então f é chamada integrável em $[a, b]$ e A é definido como sua integral.
> Aqui, Riemann foi além de Cauchy — que havia definido uma integral apenas para funções contínuas — introduzindo uma nova classe de funções: as funções integráveis (Jahnke, 2003, p. 264, tradução nossa).

Na figura 6 podemos ver a Definição de Integral Definida presente em um livro de Cálculo:

Figura 6 - Definição moderna de Integral Definida.

2 Definição de Integral Definida Se f é uma função contínua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ **pontos amostrais arbitrários** nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

Fonte: Stewart, 2022, p. 354.

A expressão $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ que ocorre na Definição de Integral Definida (Fig. 6) é chamada soma de Riemann.

3.4.3. LEBESGUE

A ideia da Integral como um limite das somas de Riemann foi fundamental para o desenvolvimento da teoria da integração desde a época de Cauchy. Porém funções descontínuas tornaram-se objeto de estudo na matemática do fim do século dezenove, e de acordo com Boyer (2012, p. 415), "[...] a ênfase no rigor levou numerosos matemáticos à produção de exemplos de funções 'patológicas' que, devido a alguma propriedade incomum, violavam um teorema que antes se supunha válido em geral".

Este contexto levou ao desenvolvimento da integral de Lebesgue. Henri Lebesgue (1875-1941) generalizou a Integral de Riemann de modo que muitas funções descontínuas que não são integráveis utilizando a definição de integral de Riemann, agora podem ser integradas com a Integral de Lebesgue.

> Lebesgue, refletindo sobre o trabalho de Borel sobre conjuntos, viu que a definição de Riemann de integral tem o defeito de só se aplicar a casos excepcionais, pois assume não mais que uns poucos pontos de descontinuidade para a função. Se uma função $y = f(x)$ tem muitos pontos de descontinuidade, então, à medida que o intervalo $x_{i+1} - x_i$ se torna menor, os valores $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$ não ficam

necessariamente próximos. Em vez de subdividir o domínio da variável independente, Lebesgue dividiu, portanto, o campo de variação $\underline{f} - f$ da função em subintervalos Δy_i e em cada subintervalo escolheu um valor η_1. Então, achou a "medida" $m(E_i)$ do conjunto E_i dos pontos do eixo x para os quais os valores de f são aproximadamente iguais a η_1. No modo informal em que Lebesgue gostava de exprimir a diferença, os integradores anteriores tinham somado indivisíveis, grandes ou pequenos, na ordem da esquerda para a direita, ao passo que ele preferia agrupar indivisíveis de tamanhos semelhantes antes de somar. Isto é, substituiu as somas de Riemann $S_n = \Sigma f(x_i)\Delta x_i$ anteriores por somas tipo Lebesgue, $S_n = \Sigma\eta_1 m(E_i)$, e depois fazia os intervalos tenderem a zero (Boyer, 2012, p. 416).

3.5. A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL DE RIEMANN E LEBESGUE

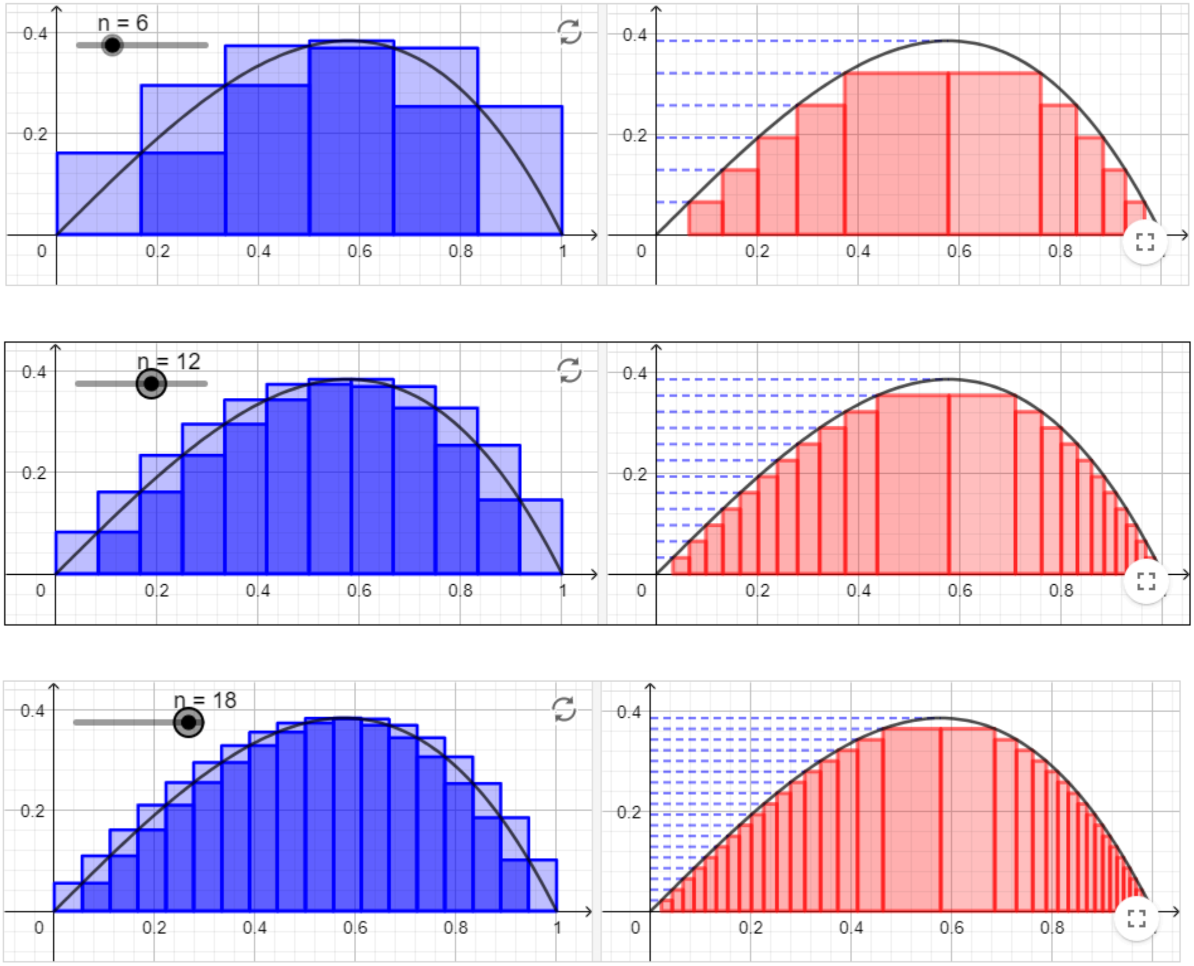
O presente trabalho apresentou a história do desenvolvimento do Cálculo Integral, destacando os estudos e trabalhos de Johannes Kepler e Bonaventura Cavalieri, Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Augustin-Louis Cauchy, Bernhard Riemann e Henri Lebesgue.

Considerando os estudos de Riemann e Lebesgue, apresentaremos a interpretação geométrica para a Integral de Riemann e Lebesgue. Destaca-se que Lebesgue generalizou a Integral de Riemann de modo que muitas funções descontínuas, que não são integráveis utilizando a definição da integral de Riemann, agora podem ser integradas com a Integral de Lebesgue.

A integral de Riemann é baseada na ideia do limite das somas de áreas de retângulos sob a curva da função. É definida em termos de partições do intervalo de integração (domínio da função) no eixo ***x*** e das somas de Riemann.

Diferentemente da Integral de Riemann, a Integral de Lebesgue particiona o contradomínio da função (eixo ***y***). A integral de Lebesgue é definida por meio do conceito de medida de Lebesgue, que se baseia na ideia do limite da soma dos valores da função no contradomínio multiplicadas pela medida de Lebesgue dos conjuntos (domínio da função) onde a função assume esses valores, como podemos observar na figura 7.

Figura 7 - A Integral de Riemann (esquerda) e a Integral de Lebesgue (direita).

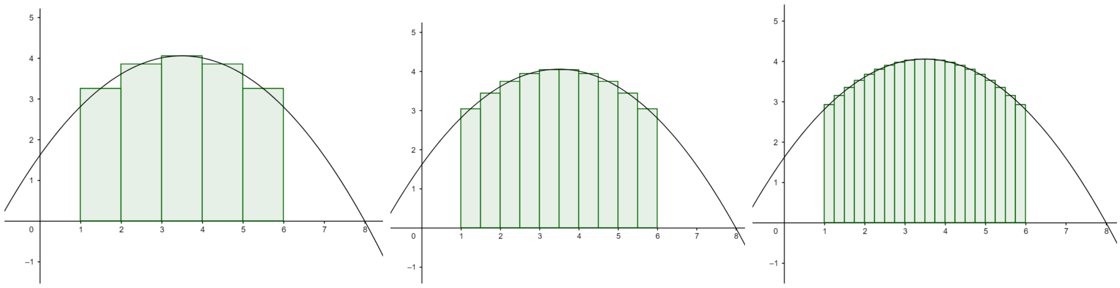


Fonte: Sacré e Fagradal.

3.5.1. INTERPRETAÇÃO INTUITIVA

Na integral de Riemann, o processo envolve dividir o domínio da função em intervalos e construir retângulos cuja altura corresponde ao valor da função nesses intervalos. Ao somar as áreas desses retângulos, obtém-se uma aproximação da integral, onde cada área é dada por $f(x_i)\Delta x$, onde $f(x_i)$ é a altura do retângulo e Δx é a largura.

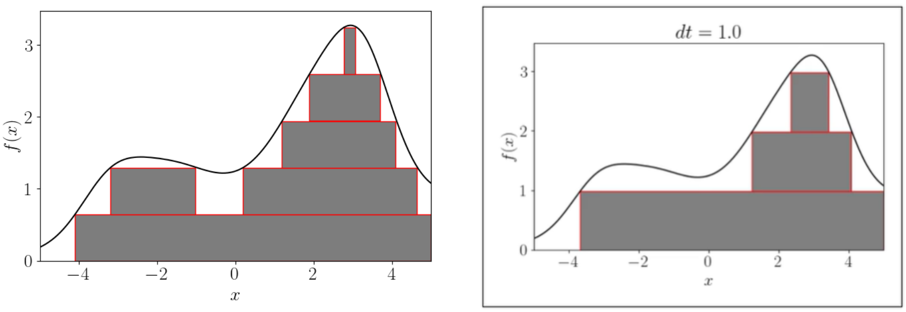
Figura 8 - Integral de Riemann - Intuição.



Fonte: Kifowit, 2018.

Para a integral de Lebesgue, a divisão ocorre no conjunto de valores da função (contradomínio), resultando em *fatias* horizontais na região sob o gráfico, que podem ser compostas por conjuntos não conectados (figura 9).

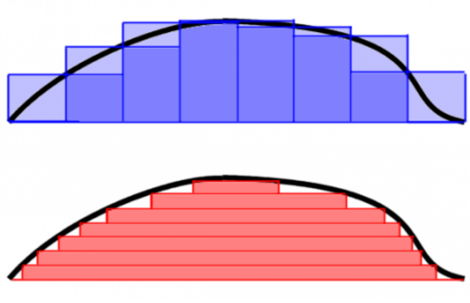
Figura 9 - Visualizando a Integral de Lebesgue - Intuição.



Fonte: Jones.

A área de uma pequena *fatia* horizontal é calculada multiplicando-se a medida da altura pelo comprimento da fatia. Dessa forma, obtém-se uma aproximação da integral de Lebesgue somando-se as áreas dessas fatias horizontais.

Figura 10 - Comparação: Integral de Riemann (azul) e Integral de Lebesgue (vermelho) - Intuição.



Fonte: Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas (ECFM).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Destaca-se que este trabalho se propôs a pesquisar a origem do Cálculo Integral, considerando as contribuições matemáticas dos antigos gregos a respeito do problema do cálculo de áreas de figuras curvas. Na sequência descrevemos os avanços na teoria da integração realizados por Johannes Kepler e Bonaventura Cavalieri, a invenção do Cálculo por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Posteriormente, examinamos a abordagem de Augustin-Louis Cauchy à definição de integral, que se baseava em limites e evitava o uso de infinitesimais. Em seguida, consideramos o trabalho de Bernhard Riemann, que expandiu o trabalho de Cauchy. E por fim, apresentamos as contribuições matemáticas para o Cálculo Integral de Henri Lebesgue, com a sua generalização da Integral de Riemann.

Este campo de estudo tem despertado o interesse de pesquisadores, conduzindo a descobertas e avanços importantes no conhecimento matemático. As descobertas nessa área do conhecimento matemático continuam ocorrendo atualmente, notavelmente, quando consideramos as aplicações do Cálculo Integral na Física, na Engenharia e na Tecnologia, e especialmente, o seu impacto no desenvolvimento da Matemática. Apesar desta exposição ser inevitavelmente incompleta, espera-se que ela ofereça uma perspectiva das origens dessa área da Matemática e como ela evoluiu das origens gregas até alguns dos principais desenvolvimentos modernos.

Com o estudo da História da Matemática podemos observar que cada matemático fez as suas contribuições ao conhecimento a partir das ideias de seus predecessores, evidenciando que a matemática se desenvolve por meio de um processo cumulativo e social, caracterizado pela comunicação e debate de novas ideias. Considerando esta perspectiva, ela desmistifica a ideia de que o conhecimento matemático é algo dado e imutável, revelando-se um processo rico em erros, tentativas, falhas e sucessos. Essa abordagem humaniza a matemática, apresentando-a como uma construção cultural e histórica, e não como um conjunto de verdades absolutas e prontas. Isso não apenas amplia o entendimento dos conceitos matemáticos, mas também contribui para o desenvolvimento de uma atitude mais positiva e engajada em relação à disciplina.

Em suma, a incorporação da história da matemática no ensino oferece múltiplos benefícios: ela humaniza e contextualiza o conhecimento, facilita a compreensão e o engajamento dos alunos, e proporciona uma base sólida para o desenvolvimento contínuo das práticas pedagógicas. Ao explorar as origens e a evolução dos conceitos matemáticos, educadores e alunos podem apreciar melhor a grandeza e a complexidade dessa realização humana, tornando o aprendizado da matemática uma experiência mais humana, rica e significativa.

No contexto da pesquisa, destaco a importância do trabalho para ampliar meus conhecimentos sobre o desenvolvimento histórico da matemática. Pude perceber que existem várias definições de Integrais com diferentes aplicações, em diferentes contextos.

REFERÊNCIAS

BARON, Margaret E. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo - A Matemática Grega - volume 1. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARON, Margaret E. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo - Indivisíveis e Infinitésimos - volume 2. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo - Newton e Leibniz - volume 3. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF,1998. 148 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 mar. 2024.

BOYER, Carl. B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Cálculo**. São Paulo: Atual, 1992.

BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo - O Cálculo no Século XVIII: Fundamentos - volume 4. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo - O Cálculo no Século XVIII: Técnicas e Aplicações - volume 5. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. MERZBACH, Uta C. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A interface entre história e matemática: uma visão histórico-pedagógica. **Revista História da Matemática para Professores**, Natal, v. 7, n. 1, p. 41-64, 2021. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/67. Acesso em: 24 jan. 2023.

EDWARDS, Charles Henry. **The historical development of the calculus**. Springer-Verlag: New York, 1979.

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas (ECFM). **Integral de Lebesgue e Integral de Daniell.** Disponível em: <https://ecfm.usac.edu.gt/index.php/node/270/> Acesso em: 23 de ago. 2024.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011

GAMBERA, A. Rezzieri. Aspectos Históricos Do Rigor Na Concepção De Integral. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 31–43, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2763. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2763. Acesso em: 5 jul. 2024.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GUZMÁN, Jefferson Huera. Perímetro e Área de um Círculo – Fórmulas e Exercícios. **Neurochispas**, 2024. Disponível em: https://br.neurochispas.com/geometria/perimetro-e-area-de-um-circulo-formulas-e-exercicios/. Acesso em: 20 de ago. 2024.

JAHNKE, Hans Niels (editor). **A history of analysis**. A History of mathematics. volume 24. American Mathematical Society. London Mathematical Society, 2003.

JONES, Andy. Visualizing Lebesgue integration. **Andy Jones.** Disponível em: https://andrewcharlesjones.github.io/journal/lebesgue-integral.html. Acesso em: 23 de ago. 2024.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Angela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 3ª Edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Angela. História da Matemática: uma prática social de investigação em construção. **Educação em Revista,** Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, n. 36, p. 177-203, dez. 2002. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0102-46982002000200011&lng=pt&nrm=iso&tlng=pt. Acesso em: 27 jul. 2024.

SACRÉ, Christine; FAGRADAL. Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue. **GeoGebra**, 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ygdfg9b7/> Acesso em: 23 de ago. 2024.

KIFOWIT, Steve. Riemann Sums. **GeoGebra**, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bsC9Pwu3/> Acesso em: 23 de ago. 2024.

STEWART, James. Cálculo, volume I. CLEGG, Daniel; WATSON, Saleem. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2022.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.