

MODELAGEM E ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA VIGA-HÉLICE

BISPO, Carlos A. S¹; YAMANAKA, Hugo F²; BREGANON, Ricardo³; ALMEIDA, João. P. L. S⁴; ALVES, Uiliam N. L. T⁵

¹ Discente em Engenharia de Controle e Automação, IFPR, Jacarezinho, Paraná, carlosalexandrehk@gmail.com

² Discente em Engenharia de Controle e Automação, IFPR, Jacarezinho, Paraná, hugoferndoyamanaka@gmail.com

³ Doutor em Engenharia Mecânica, Instituto Federal do Paraná (IFPR), Jacarezinho, Paraná, ricardo.breganon@ifpr.edu.br

⁴ Doutor em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, Instituto Federal do Paraná (IFPR), Jacarezinho, Paraná, joao.almeida@ifpr.edu.br

⁵ Doutor em Engenharia Elétrica, Instituto Federal do Paraná (IFPR), Jacarezinho, Paraná, uiliam.alves@ifpr.edu.br

RESUMO

Pêndulos são sistemas bem conhecidos pela engenharia de controle e possuem diversas variações. O presente trabalho apresenta a obtenção de um modelo matemático e a análise da dinâmica de um sistema Viga-hélice. O sistema mecânico Viga-hélice é um modelo de pêndulo que naturalmente possui dinâmica não linear, e seu funcionamento consiste na variação e estabilização da posição angular de uma haste fixa a um eixo de rotação, com um conjunto motor-hélice em sua outra extremidade. O modelo do sistema foi linearizado próximo a um ponto de operação utilizando a série de Taylor, e sua função de transferência foi obtida. A análise da dinâmica do sistema foi desenvolvida variando os parâmetros do sistema com objetivo de identificar com quais parâmetros o sistema tem um melhor desempenho e é mais estável.

PALAVRAS-CHAVE: Viga-hélice, análise dinâmica, sistema não linear, linearização.

INTRODUÇÃO

Os sistemas do tipo pêndulo são problemas clássicos estudados na área de controle. Esses sistemas são naturalmente não lineares e podem ser aproximados por um modelo linearizado (JOB; JOSE, 2015). O sistema Viga-hélice é um sistema do tipo pêndulo, que consiste em uma hélice acoplada ao eixo de um motor para produzir uma força de empuxo a fim de mover a haste para a posição desejada (SILVA et al, 2021). Utilizando a série de Taylor, foi obtido um modelo matemático linearizado para o sistema próximo a um ponto de operação. A análise da dinâmica do sistema consiste em calcular e comparar os diferentes valores que os polos do sistema assumem com a variação dos parâmetros físicos do protótipo do Viga-hélice, tais como massa do motor, a massa e o comprimento da haste, e o coeficiente de amortecimento viscoso. Tal análise tem como objetivo identificar com quais parâmetros o sistema possui um melhor desempenho e resposta.

SISTEMA VIGA-HÉLICE

O sistema Viga-hélice é um sistema mecânico que consiste em uma haste com rotação em torno de um eixo fixo. A extremidade da haste possui um conjunto motor hélice que proporciona o empuxo necessário para a variação do ângulo ϕ . Na Figura 1 é possível observar o diagrama de um sistema Viga-hélice e um protótipo deste tipo de sistema que está no laboratório de automação do IFPR, campus Jacarezinho.

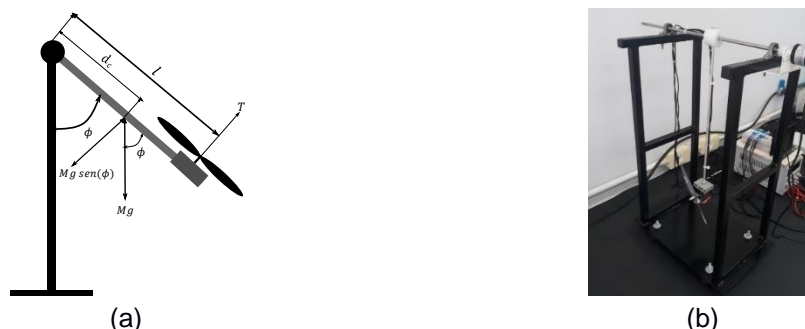
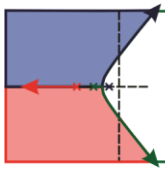


Figura 1 - (a) diagrama de corpo livre do sistema Viga-hélice e (b) protótipo Viga-hélice.



A partir do diagrama do sistema Viga-hélice apresentado na Figura 1 (a), fazendo o somatório das forças e torques em relação ao ponto de rotação, é possível obter a equação diferencial do sistema:

$$J \frac{d^2 \phi}{dt^2} + c \frac{d\phi}{dt} + mlgd_c \text{sen}(\phi) = T. \quad (1)$$

Sendo l a distância entre o conjunto motor hélice e o ponto de rotação, J o momento de inércia do sistema, c o coeficiente de amortecimento viscoso presente no eixo de rotação, T o torque exercido pelo motor, d_c a posição do centro de massa do sistema e m a massa do sistema.

Linearizando o termo não linear através da série de Taylor, e considerando ϕ_0 um ângulo constante como um ponto de operação para o sistema, tem-se a seguinte aproximação:

$$\text{sen}(\phi_0) \approx \text{sen}(\phi_0) + \frac{d\text{sen}(\phi_0)}{d\phi} \frac{\phi - \phi_0}{1!}. \quad (2)$$

Fazendo $\Delta_\phi = \phi - \phi_0$ e tomando sua derivada tem-se

$$\frac{d\Delta_\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt}. \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), segue que

$$\begin{aligned} J \frac{d^2 \Delta_\phi}{dt^2} + c \frac{d\Delta_\phi}{dt} + mlgd_c [\text{sen}(\phi_0) + \cos(\phi_0)\Delta_\phi] &= T. \\ J \frac{d^2 \Delta_\phi}{dt^2} + c \frac{d\Delta_\phi}{dt} + mlgd_c \cos(\phi_0)\Delta_\phi &= T - mlgd_c \text{sen}(\phi_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Fazendo a substituição $\Delta_T = T - mlgd_c \text{sen}(\phi_0)$ em (4) resulta em

$$J \frac{d^2 \Delta_\phi}{dt^2} + c \frac{d\Delta_\phi}{dt} + mlgd_c \cos(\phi_0)\Delta_\phi = \Delta_T. \quad (5)$$

Aplicando a transformada de Laplace (NISE, 2018, p. 28) em (5) é obtida a expressão no domínio da frequência (6) e posteriormente organizando os termos de entrada do sistema sobre a saída do sistema, é obtida a função de transferência do sistema dado em (7).

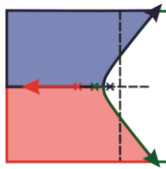
$$Js^2 \Delta_\phi(s) + cs \Delta_\phi(s) + mlgd_c \cos(\phi_0) \Delta_\phi(s) = \Delta_T(s). \quad (6)$$

$$\frac{\Delta_\phi}{\Delta_T(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{cs}{J} + \frac{mlgd_c \cos(\phi_0)}{J}}. \quad (7)$$

O protótipo físico do sistema Viga-hélice possui os parâmetros descritos na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do sistema Viga-hélice.

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
g	Aceleração da gravidade	9,81	m/s^2
m_1	Massa do conjunto hélice motor	0,295	kg
m_2	Massa da haste	0,020	kg
l	Comprimento da haste	0,306	m
c	Coeficiente de amortecimento viscoso	0,0086	Nms/rad
$J = \frac{m_1}{3} l^2 + m_2 l^2$	Momento de inércia do sistema	0,0282	$kg.m^2$
d_c	Posição do centro de massa do sistema	0,2963	m



ANÁLISE DO SISTEMA E DISCUSSÕES

A fim de analisar a estabilidade e dinâmica do sistema Viga-hélice, foram considerados diferentes valores de parâmetros, sendo eles a massa do motor entre $0,050\text{ kg}$ e $0,350\text{ kg}$, comprimento da haste entre $0,20\text{ m}$ e $0,40\text{ m}$, o ângulo de operação entre 10° e 90° , coeficiente de amortecimento viscoso entre $0,0086\text{ Nms/rad}$ e 1 Nms/rad , e a massa da haste com valores entre $0,010\text{ kg}$ e $0,100\text{ kg}$. Desta forma, foram calculados os polos do sistema considerando os demais parâmetros dados na Tabela (1) e com os parâmetros nas faixas de valores escolhidos. É possível observar a influência da variação de cada parâmetro na dinâmica do sistema nas Figuras 2, 3 e 4.

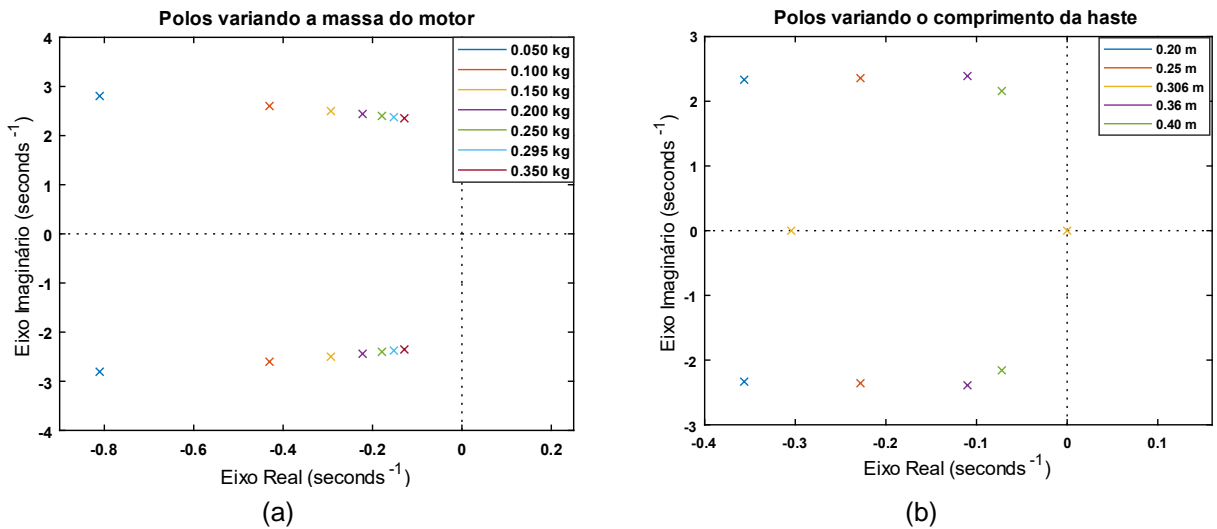


Figura 2 - Polos do sistema variando: (a) a massa do motor e (b) comprimento da haste.

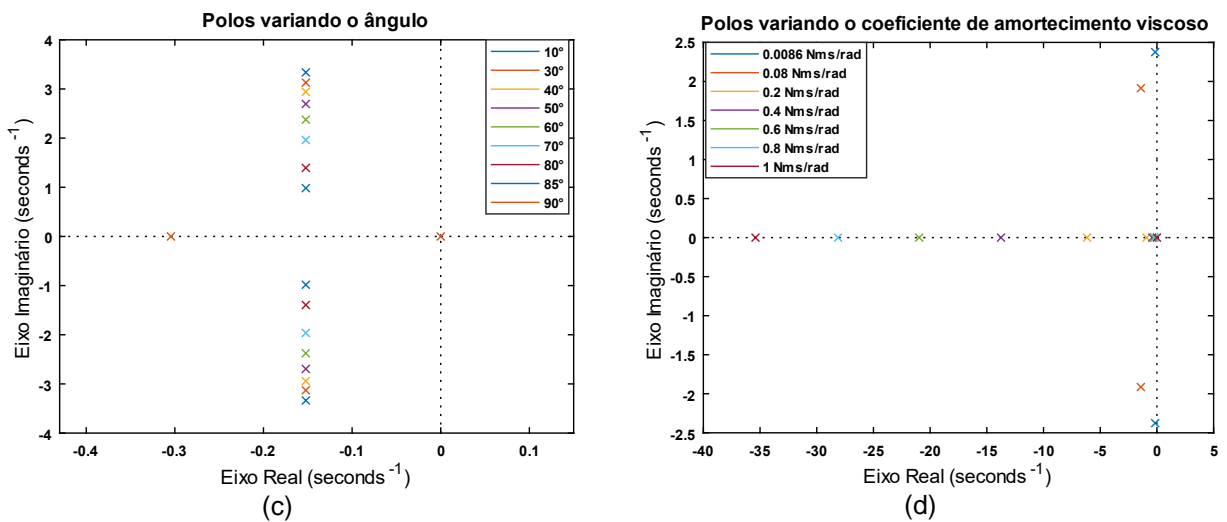


Figura 3 - Polos do sistema variando: (c) o ângulo e (d) coeficiente de amortecimento viscoso.

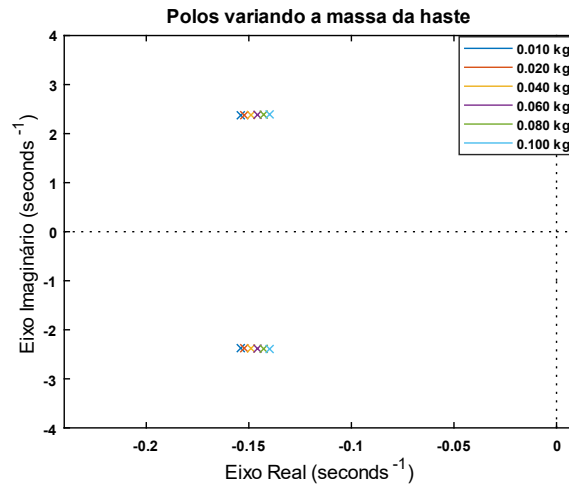
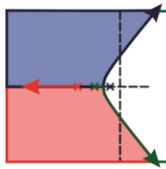


Figura 4 - Polos do sistema variando a massa da haste.

Analisando o comportamento dos polos com a variação dos parâmetros do sistema é possível observar que, ao aumentar a massa do motor, a componente real e imaginária dos polos decresce. Com massas menores as componentes real e imaginária dos polos aumentam. O mesmo ocorre com a massa da haste, como mostrado na Figura 2. Já, os polos variando o ângulo de operação, possuem componentes com parte real invariantes até o ângulo de 85° e com parte imaginária crescente conforme o aumento do ângulo. Por esta análise, com o ângulo de 90° é possível observar um polo em $s = 0$ e outro polo com componente imaginária nula. Observando os polos resultantes das variações do coeficiente de amortecimento viscoso, nota-se que maiores valores de coeficiente de amortecimento aumentam a componente real dos polos, Figura 3, e os polos variando a massa da haste crescem sua parte real, conforme o aumento de sua massa, Figura 4. As componentes dos polos do sistema Viga-hélice influenciam a resposta do sistema na seguinte forma: polos com maiores componentes reais negativas proporcionam resposta mais rápidas e as componentes imaginárias são correspondentes as frequências de oscilação da resposta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando os parâmetros nominais de construção do sistema Viga-hélice e os parâmetros escolhidos para a análise dinâmica foi possível calcular em quais configurações o sistema obteve um melhor desempenho. Analisando a posição dos polos no semi-plano esquerdo, o sistema possui resposta menos oscilatória e mais estável com a massa do motor de $0,050\text{ kg}$, massa da haste de $0,010\text{ kg}$, utilizando o coeficiente de amortecimento viscoso de 1 Nms/rad e haste medindo $0,20\text{ m}$. Concluindo que o sistema é mais estável e tem melhor resposta com massas menores, maior coeficiente de amortecimento viscoso, menor comprimento de haste, comparado a faixa de parâmetros escolhida e os parâmetros nominais do sistema Viga-hélice, facilitando assim o projeto de um controlador para o sistema.

REFERÊNCIAS

- JOB, M. M.; JOSE, P. S. H. **Modeling and control of mechatronic aeropendulum**. In: International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS), 2015, Coimbatore. Anais... Piscataway: IEEE, 2015. pp. 1-5.
- H. R. M. Silva, R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção and I. T. M. Ramos. **Switched Control and Tracking Application in Aeropendulum System using Fuzzy Models**. 2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2021, pp. 1-6, doi: 10.1109/FUZZ45933.2021.9494543.
- NISE, Norman. **Engenharia de sistemas de controle**: Rio de Janeiro. 7 ed: LTC, 2018.